Un résultat de rupture de symétrie

Dans ce séminaire nous étudiérons la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{\displaystyle\int_B |x|^\alpha |\nabla v|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_B |x|^\alpha |v|^q \, dx\right)^{2/q}}\,, \qquad v \in W^{1,2}(B, |x|^\alpha), \quad \int_B |x|^\alpha v \, dx = 0\,,$$

où B est la boule unité centrée en l'origine, $2 \leq q < 2^*$ et $-N < \alpha < N$. Nous nous intéresserons aux propriétés de symétrie des minimiseurs. Plus en détails nous montrerons que les minimiseurs sont à symétrie sphérique. En dimension 2, cela implique la symétrie par rapport à un axe, par exemple l'axe x_1, si $x = (x_1, x_2)$. Nous montrerons ensuite que les minimiseurs sont antisymétriques par rapport à l'axe x_2 pour $q = 2$, et qu'ils ne le sont pas pour q suffisamment grand.

Ce problème a été motivé par des phénomènes de perte de symétrie montrés par D. Smets, J. Su et M. Willem pour les minimiseurs de

$$v \in H_0^1(B) \to \frac{\displaystyle\int_B |\nabla v|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_B |x|^\alpha |v|^q \, dx\right)^{2/q}}\,,$$

et par P. Girão et T. Weth pour la fonctionnelle J dans le cas $\alpha = 0$.

Les résultats exposés ont été obtenus en collaboration avec F. Brock, F. Chiacchio et A. Mercaldo.